La transformée de Laplace

Table des matières

Définition de la transformée de Laplace

L'idée générale est de changer de variable, et de faire correspondre à la fonction **temporelle** $f(t)$ une image de celle-ci, $F(p)$, uniquement valable dans le domaine **symbolique**.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

Définition

$$F(p) = \mathcal{L}\ [f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p\ t} \times f(t)\ dt$$

On passe du domaine temporel (variable t) au domaine symbolique (variable p)

Remarque

La transformée F(p) n'existe que si l'intégrale a un sens ; il faut donc que :

- $f(t)$ soit intégrable
- lorsque $t \to \infty$, $f(t)$ ne croisse pas plus vite qu'une exponentielle (afin de maintenir le caractère convergent de la fonction à intégrer)

Dans la pratique, on ne calcule que les transformées de Laplace de fonctions **causales,** c'est-à-dire telles que $f(t) = 0$ pour $t \leq 0$. Ces fonctions f représentent des grandeurs physiques : intensité, température, effort, vitesse, etc..

On écrit la transformée de Laplace inverse comme suit : $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\ [F(p)]$.

Notation anglo-saxonne ***Remarque***

Dans les pays anglo-saxons, la variable symbolique est souvent notée s, pour *symbolic variable*. Les logiciels de simulation Scilab et Matlab utilisent cette notation.

Point de vue complexe de la variable p ***Remarque***

Si besoin (cf. analyse harmonique), on pourra considérer la variable symbolique p comme un nombre complexe (avec partie réelle et partie imaginaire) : $p = \alpha + j\,\beta$

Convention d'écriture *Attention*

Par habitude, une **lettre minuscule** sera utilisée pour noter le signal dans le **domaine temporel**, et la **lettre majuscule** pour noter la **transformée de Laplace de ce signal**. Cependant, si dans un énoncé, la grandeur temporelle est déjà en majuscule, on confondra les deux écritures ; il faudra donc bien veiller à préciser la variable associée au domaine d'étude :

- $C(t)$ pour le domaine temporel
- $C(p)$ pour le domaine symbolique

Propriétés de la transformée de Laplace

Conditions de Heaviside *Fondamental*

Oliver Heaviside (1850-1925)

Une fonction du temps f(t) vérifie les **conditions de Heaviside** si elle vérifie : $f(0) = 0,\ \dot{f}(0) = 0,\ \ddot{f}(0) = 0$... c'est à dire si les **conditions initiales sont nulles** et le système au repos pour $t < 0$.

Produit *Attention*

La transformée de Laplace d'un produit de fonctions **n'est pas** le produit des transformées ! Idem pour la transformée inverse.

1. Unicité

A $f(t)$ correspond $F(p)$ unique, et vice-versa.

2. Linéarité

Linéarité

$$\mathcal{L}\ [f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}\ [f_1(t)] + \mathcal{L}\ [f_2(t)]$$

$$\mathcal{L}\ [\lambda f(t)] = \lambda\ \mathcal{L}[f(t)] = \lambda\ F(p)$$

3. Facteur d'échelle

Complément

On cherche $\mathcal{L}(f(at)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(at)dt$.

En posant $u = a\ t$ donc $du = a\ dt$ on a $\mathcal{L}(f(at)) = \int_0^{\infty} e^{-p\frac{u}{a}} f(u)\frac{du}{a}$

Définition

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a}\ F\left(\frac{p}{a}\right)$$

4. Dérivation

Complément

On recherche $\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-p\ t} \times \frac{df(t)}{dt}\ dt$

On intègre par parties en posant $u = e^{-pt}$ donc $du = -p\ e^{-pt}$ et $v = f(t)$ donc $dv = \frac{df(t)}{dt}$.

D'où $\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = [e^{-pt} f(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -p\ e^{-pt}\ f(t)\ dt$

Or $\lim_{t \to \infty} e^{-pt} f(t) = 0$ car $f(t)$ est bornée : on obtient alors la propriété ci-dessous.

Définition

Dérivée première : $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p\ F(p) - f(0^+)$

Dérivée seconde : $\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2\ F(p) - p\ f(0^+) - f'(0^+)$

Fondamental

Dans les conditions de Heaviside : $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p\ F(p)$ et $\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2\ F(p)$

Dériver par rapport à t dans le domaine temporel revient alors à **multiplier par p** dans le domaine symbolique.

5. Intégration

Complément

On recherche $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,du\right)$.

Soit $f(t) = \dfrac{d\,g(t)}{dt}$.

On a alors $\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \mathcal{L}\left(\dfrac{dg(t)}{dt}\right) = p\,G(p) - g(0^+) = p\,\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,du\right) - g(0^+)$.

Définition

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$$

Fondamental

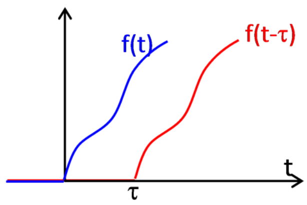
Dans les conditions de Heaviside : $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$

Intégrer dans le domaine temporel revient à **diviser par p** dans le domaine symbolique.

6. Théorèmes

Théorème du retard

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau p}\,F(p)$$



Retard

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} p\,F(p)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\,F(p)$$

Attention

Ne pas oublier la multiplication par p dans le domaine symbolique !

Transformées de Laplace courantes

Distribution ("fonction") de Dirac

Fondamental

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1$$

Échelon

Fondamental

$$\mathcal{L}\left[e_0\ u(t)\right] = \frac{e_0}{p}$$

Rampe

Fondamental

$$\mathcal{L}\left[a_0\ t\ u(t)\right] = \frac{a_0}{p^2}$$

Fonction exponentielle (avec a>0)

Fondamental

$$\mathcal{L}\left[e^{-a\,t}\ u(t)\right] = \frac{1}{p+a}$$

$$\mathcal{L}\left[t \cdot e^{-a\,t}\ u(t)\right] = \frac{1}{(p+a)^2}$$

Fonctions sinus et cosinus

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\ u(t)\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\ u(t)\right] = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

Fonctions sinus et cosinus avec exponentielle en facteur

$$\mathcal{L}\left[e^{-a\,t}\ \sin(\omega t)\ u(t)\right] = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-a\,t}\ \cos(\omega t)\ u(t)\right] = \frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$$

Remarque

Même si les transformées de Laplace courantes peuvent être rappelées au candidat lors des concours, il est primordial de connaître les plus courantes présentées ici **par cœur**.

Résolution d'équations différentielles par transformée de Laplace

IV

Première étape : transformée de Laplace

Méthode

L'équation différentielle est transformée dans le domaine symbolique : les propriétés de linéarité et de dérivation de la transformée de Laplace permettent facilement d'obtenir une équation polynomiale.

Exemple avec les conditions de Heaviside :

$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 2u(t)$ donne $p^2\ Y(p) + 5p\ Y(p) + 4Y(p) = \frac{2}{p}$

Deuxième étape : résolution de l'équation symbolique

Méthode

La ou les équations symboliques sont résolues suivant ce qui est recherché.

Suite de l'exemple, où l'on cherche à exprimer y(t) (donc Y(p) dans un premier temps) :

$Y(p)\left[p^2 + 5p + 4\right] = \frac{2}{p}$, et $Y(p) = \frac{2}{p\,(p^2 + 5p + 4)}$

Malheureusement, la forme de la solution symbolique est bien souvent une fraction de polynômes qui ne correspond pas directement à une transformée d'une fonction courante.

Il est alors absolument nécessaire d'exprimer cette fraction de polynômes sous la forme de somme de termes usuels, simples. C'est la **décomposition en éléments simples**.

La propriété de linéarité de la transformée de Laplace permettra ensuite de trouver la forme temporelle pour chacun des termes sommés dans la forme symbolique.

Suite de l'exemple, où les racines du dénominateur sont 0, -4 et -1 :

$$Y(p) = \frac{2}{p(p+4)(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+4} + \frac{C}{p+1}$$

$A = \lim_{p\to 0} p\ Y(p) = \frac{1}{2}$, $B = \lim_{p\to -4}(p+4)\ Y(p) = \frac{1}{6}$ et $C = \lim_{p\to -1}(p+1)\ Y(p) = -\frac{2}{3}$

Ainsi $Y(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{6(p+4)} - \frac{2}{3(p+1)}$

Troisième étape : transformée de Laplace inverse

Méthode

Il ne reste plus qu'à identifier chacun des termes de l'expression symbolique à des transformées de Laplace usuelles.

Fin de l'exemple :

$Y(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{6(p+4)} - \frac{2}{3(p+1)}$ donne $y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{-4t} - \frac{2}{3}e^{-t}\right)u(t)$