

# Fonction de transfert et schéma-blocs



# Table des matières

<b>I - Fonctions de transfert</b>	<b>3</b>
1. Généralités .....	3
2. Fonctions de transfert particulières à connaître .....	4
2.1. Système à action proportionnelle .....	4
2.2. Système intégrateur .....	4
2.3. Système de premier ordre .....	4
2.4. Système de second ordre .....	5
2.5. Calcul des pôles d'un second ordre et représentation dans le plan complexe .....	5
<b>II - Schémas-blocs</b>	<b>7</b>
1. Éléments d'un schéma bloc .....	7
2. Transformation et réduction des schémas-blocs.....	7
2.1. Combinaison de fonctions de transfert.....	7
2.2. Déplacements.....	8
3. Fonction de transfert en boucle fermée .....	9
4. Fonction de transfert en boucle ouverte .....	9
5. Remarques .....	10



# Fonctions de transfert

## 1. Généralités

Soit un système décrit par l'équation différentielle :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t)$$

On se place dans des conditions de Heaviside, alors  $\mathcal{L} \left[ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = p^n F(p)$

Grâce à la transformée de Laplace, on obtient :

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_0 E(p).$$

### Fonction de transfert



**Définition**

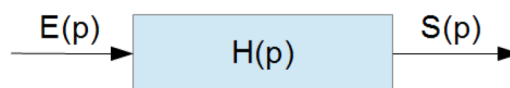
On appelle **fonction de transfert** la fonction :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0}$$

Elle **représente le comportement intrinsèque du système** : son expression ne dépend pas du signal d'entrée.

Elle s'exprime simplement comme le **rapport de deux polynômes en  $p$**  (fraction rationnelle), construits à partir des coefficients de l'équation différentielle régissant son évolution.

Dans le domaine symbolique, la relation entre l'entrée et la sortie **est bien linéaire** : elle s'écrit  $S(p) = H(p) \cdot E(p)$ .



### Forme canonique



**Fondamental**

Toute fonction de transfert peut être exprimée sous sa **forme canonique**. Celle-ci permet de comparer la fonction de transfert à d'autres, d'identifier des paramètres, etc..

$$H(p) = \frac{K (1 + \dots + b_{m'} p^{m'})}{p^\alpha (1 + \dots + a_{n'} p^{n'})}$$

avec :

- $n = n' + \alpha$  : **ordre** du système
- $\alpha$  : **classe** du système
- $K$  : **gain** statique

### Zéros et pôles



Fondamental

En faisant apparaître les racines (complexes éventuellement) du dénominateur et du numérateur de la fonction de transfert,  $H(p)$  peut s'écrire :

$$H(p) = \frac{K(p - z_1)(p - z_2)\dots(p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n)}$$

- $z_i$  sont les **zéros** de la fonction de transfert
- $p_i$  sont les **pôles** de la fonction de transfert

L'étude des pôles et des zéros sera utile pour avoir une idée des performances du système (notamment la stabilité)

## 2. Fonctions de transfert particulières à connaître

On se place ici dans les conditions de Heaviside.

### 2.1. Système à action proportionnelle

$$s(t) = K \cdot e(t), \text{ donc } S(p) = K \cdot E(p).$$



Fondamental

$$H(p) = K$$

### 2.2. Système intégrateur

$$\frac{d s(t)}{dt} = K \cdot e(t), \text{ donc } S(p) = \frac{K}{p} \cdot E(p).$$



Fondamental

$$H(p) = \frac{K}{p}$$

### 2.3. Système de premier ordre

$$\tau \frac{d s(t)}{dt} + s(t) = K e(t), \text{ donc } \tau p S(p) + S(p) = K E(p).$$



Fondamental

Forme canonique de la fonction de transfert d'un système de premier ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

avec :

$K$  : gain statique

$\tau$  : constante de temps (en secondes)

## 2.4. Système de second ordre

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2 m \omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K \omega_0^2 e(t),$$

$$\text{donc } p^2 S(p) + 2 m \omega_0 p S(p) + \omega_0^2 S(p) = K \omega_0^2 E(p).$$

### Forme canonique de la fonction de transfert d'un système de second ordre



Fondamental

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

avec :

- $K$ : gain statique
- $\omega_0$ : pulsation propre (en radians par seconde)
- $m$ : coefficient d'amortissement (sans unité)

#### Remarque :

Le polynôme de degré 2 au dénominateur peut s'écrire  $(p - p_1) \cdot (p - p_2)$  avec  $p_1$  et  $p_2$  les **pôles** de la fonction de transfert.

## 2.5. Calcul des pôles d'un second ordre et représentation dans le plan complexe

### Discriminant

Le polynôme du dénominateur peut s'écrire  $p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2$ .

Le discriminant  $\Delta = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$ .

Les **pôles** de la fonction de transfert de second ordre **dépendent** donc de la valeur du **coefficient d'amortissement  $m$** ; il y a **trois cas de figure** possibles.

a) Cas où  $m > 1$ , discriminant positif

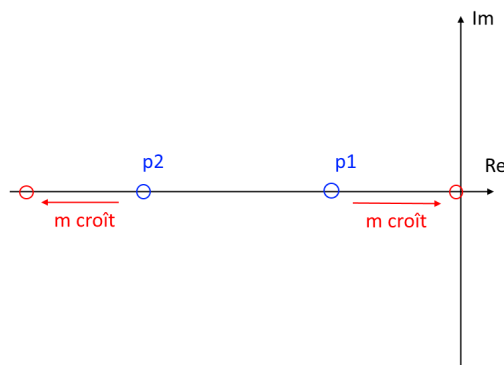
$$p_1 = -m\omega_0 + \omega_0 \sqrt{m^2 - 1}$$

$$p_2 = -m\omega_0 - \omega_0 \sqrt{m^2 - 1}$$

Les pôles sont **deux réels négatifs**.

### Représentation dans le plan complexe

Lorsque  $m$  tend vers  $\infty$ ,  $p_1$  tend vers 0 et  $p_2$  tend vers  $-\infty$ .



Deux pôles réels négatifs

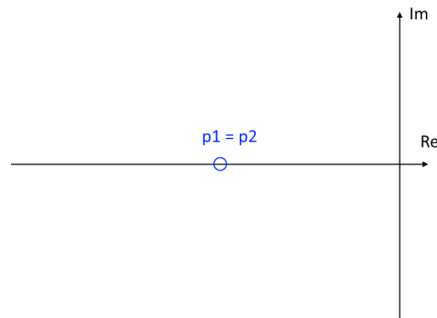
$$p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2$$

b) Cas où  $m=1$ , discriminant nul

$$p_1 = p_2 = -\omega_0$$

Les deux pôles sont **réels confondus**.

**Représentation dans le plan complexe**



*Deux pôles réels confondus*

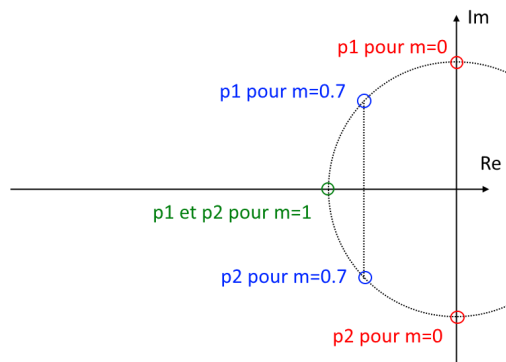
c) Cas où  $m < 1$ , discriminant négatif

$$\text{On pose } \Delta = 4\omega_0^2 j^2(1 - m^2).$$

$$p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0 \sqrt{1 - m^2}$$

$$p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0 \sqrt{1 - m^2}$$

Les deux pôles sont **deux complexes conjugués**.



*Pôles complexes conjugués*

$$|p_1| = |p_2| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \omega_0$$

# Schémas-blocs



Chaque composant d'un système asservi peut être modélisé par une fonction de transfert particulière.

L'association de toutes ces fonctions de transfert en une seule, globale, permet de modéliser et d'étudier le système complet de façon plus simple.

En revanche, on s'éloigne de la réalité structurelle du système.

L'obtention de la fonction de transfert globale d'un système peut se faire soit analytiquement, soit graphiquement grâce aux **schémas-blocs**.

## 1. Éléments d'un schéma bloc

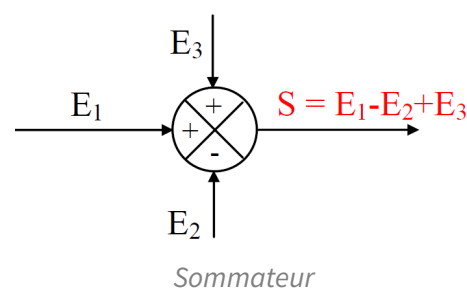
### Bloc

Chaque bloc du schéma bloc représente une fonction de transfert ; il comporte systématiquement une flèche entrante et une flèche sortante.

### Sommateur

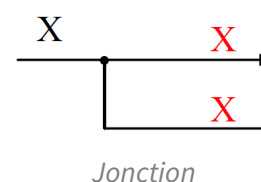
Un sommateur comporte deux à trois entrées et toujours une seule sortie. Il permet de sommer ou retrancher plusieurs grandeurs physiques.

Chaque entrée est affectée du signe positif ou négatif. Toutes les branches représentent des grandeurs homogènes.



### Jonction

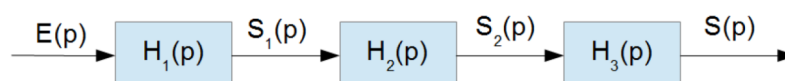
Une jonction est un prélèvement qui a le même signal que la branche principale.



## 2. Transformation et réduction des schémas-blocs

### 2.1. Combinaison de fonctions de transfert

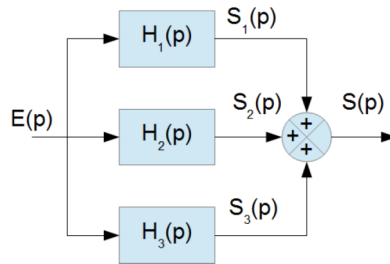
#### Fonctions de transfert en série



La sortie d'un bloc est l'entrée du bloc suivant.

On a alors  $H(p)$ , fonction de transfert globale :  $H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)$ .

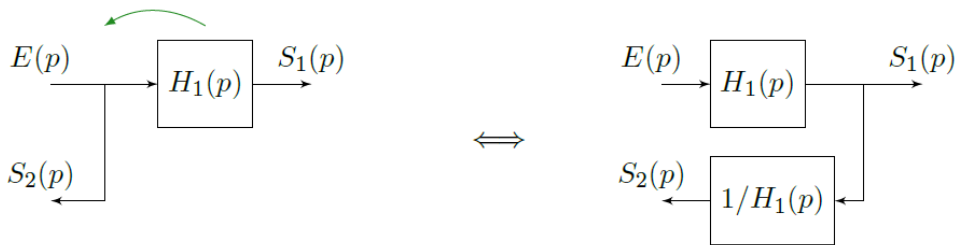
**Fonctions de transfert en parallèle**



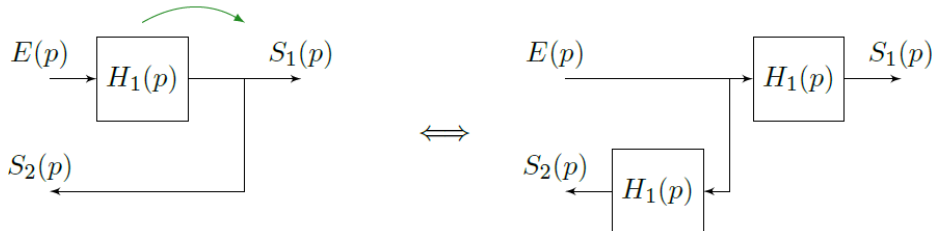
$S(p) = S_1(p) + S_2(p) + S_3(p)$  et  $S_i(p) = H_i(p) \cdot E(p)$   
 $H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$ .

**2.2. Déplacements**

**Déplacement d'un bloc de part et d'autre d'une jonction**

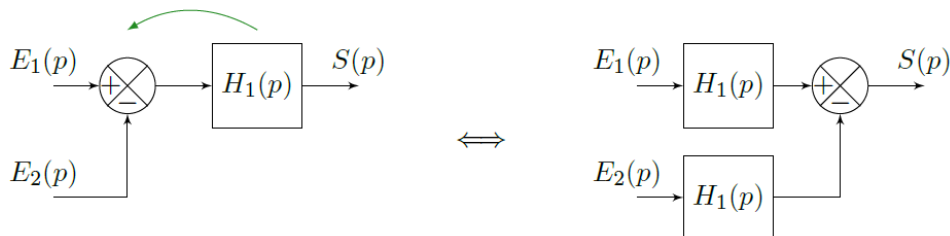


*Déplacement d'un bloc vers l'amont d'une jonction*

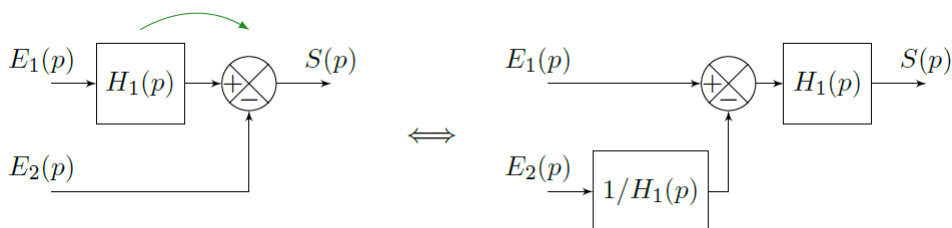


*Déplacement d'un bloc vers l'aval d'une jonction*

**Déplacement d'un bloc de part et d'autre d'un sommateur**



*Déplacement d'un bloc vers l'amont d'un sommateur*



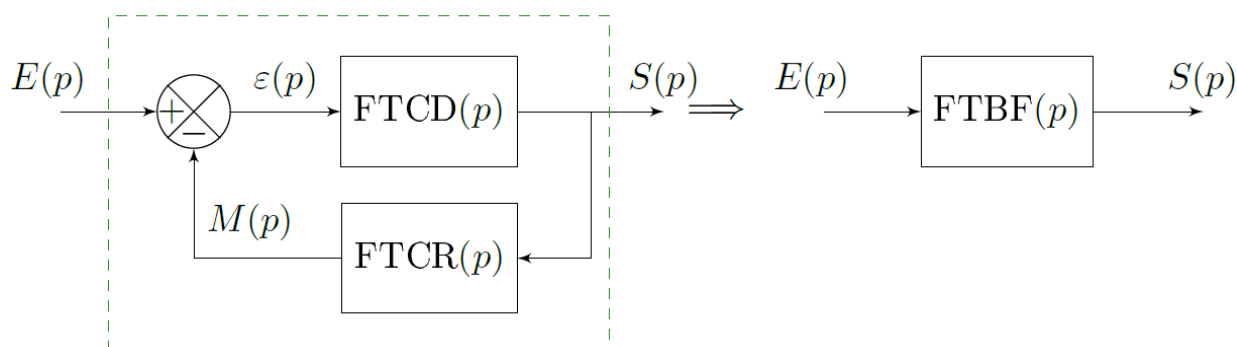
*Déplacement d'un bloc vers l'aval d'un sommateur*



### 3. Fonction de transfert en boucle fermée

Les systèmes asservis étudiés sont généralement représentables par un schéma-blocs **avec rétroaction**. Pour étudier les performances de ces systèmes, il est nécessaire de déterminer la fonction de transfert globale, appelée **fonction de transfert en boucle fermée**.

#### Fonction de transfert en boucle fermée



Système asservi en boucle fermée

$$S = FTCD.\epsilon \quad \text{et} \quad \epsilon = E - FTCR.S, \quad \text{d'où} \quad S = FTCD.(E - FTCR.S) \quad \text{ou} \\ S.(1 + FTCD.FTCR) = FTCD.E$$

Cela donne la formule de Black :

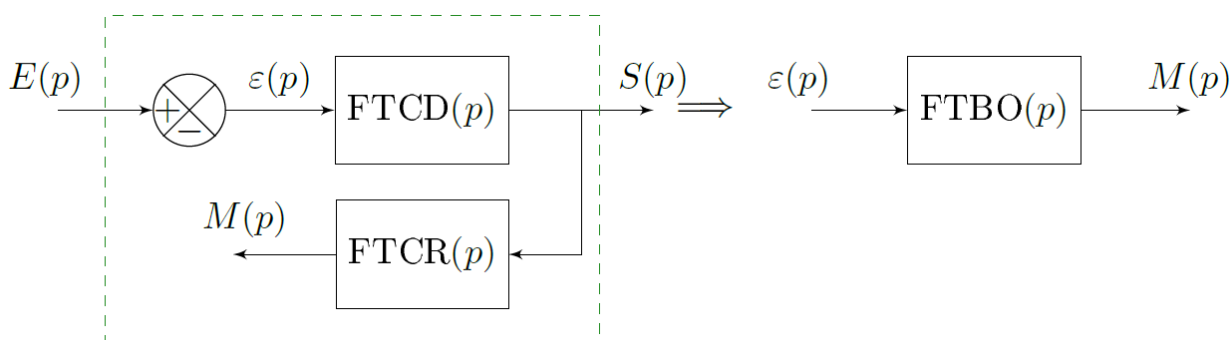
$$FTBF = \frac{FTCD}{1 + FTCD.FTCR}$$

### 4. Fonction de transfert en boucle ouverte



Dans l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte, on considère comme signal de sortie du système le signal M ; c'est l'image par la chaîne de retour du signal S.

#### Fonction de transfert en boucle ouverte



système asservi en boucle ouverte

$$M = FTCD.FTCR.\epsilon \quad \text{et} \quad \epsilon = E \quad \text{d'où} \quad M = FTCD.FTCR.E = FTBO . E.$$

Ce qui donne :

$$FTBO = FTCD.FTCR$$

## 5. Remarques

### Lien entre FTBF et FTBO



Remarque

Par définition de la fonction de transfert en boucle ouverte, on peut aussi écrire :

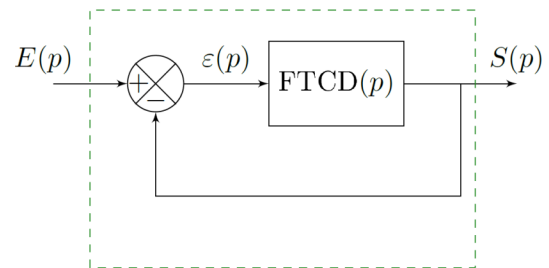
$$FTBF = \frac{FTCD}{1 + FTBO}$$

### FTBF pour un système asservi à retour unitaire



Remarque

Par manipulation du schéma-bloc, on peut toujours retrouver une forme **à retour unitaire** ( $FTCR(p) = 1$ ). Dans ce cas, la fonction de transfert de la chaîne directe et la  $FTBO$  sont identiques.



Système asservi en boucle fermée à retour unitaire

Par conséquent : 
$$FTBF = \frac{FTBO}{1 + FTBO}$$